数理解析研究所講究録
320巻 1978年 135-150

C^*-環の拡大について

山形大 理 富山 淳

所謂BDF-理論(Brown-Douglas-Fillmore)における$C(X)$のコンパクト作用素の環$C(H)$による拡大全体の同値類$\mathrm{Ext}(X)$が群になることの[4]の証明は、Xが平面の部分集合の場合でも非常に複雑なものであったが、Arveson [2]はpositive mapのliftingを利用することにより、非常に簡潔な証明を与えている。そしてそれはBDFの最近の論文[5]における$\mathrm{Ext}(X)$の再構成にも使われている。しかし$\mathrm{Ext}(X)$はC^*-環を非可換にまで考えるとき、そこで基本的なものはpositive mapではなくcompletely positive mapであることが明らかになってくるに及んで、Choi & Effros [6]はnuclear map又は可分なnuclear C^*-環からのC^*-商環へのcompletely positive mapは常に元のC^*-環へのcompletely positive mapにまで持ち上げることが出来ることを示した。一方BDF-理論の具体的な基礎の一つとなったWeyl-von Neumannの定理はVoiculescu [8]によって一

般のC^*-環における形にまで拡張されその結果の一つとしてExt(A)は常に単位元をもつsemigroupであることが示された。

従って[2]の証明と同様にして[6]によりAが可分なnuclear環ならばExt(A)は群になることが判明したわけであるがArvesonは更に[3]においてそれらを綜合し統一的な方法で[6]及び[8]の結果の別証を与え合せてliftingとExt(A)の群構造との関係を明確にしている。又completely positive mapのliftingの限界についてはAnderson [1]はExt(A)は一般には可分なC^*環についても群にならないことを示している。本稿はこれらの結果の紹介を主にしている。

§1. Ext(A)の導入. 以下Hは可分なヒルベルト空間とし、その上の有界線型作用素の全体を$\mathcal{L}(H)$, コンパクト作用素の全体を$\mathcal{LC}(H)$, Calkin環$\mathcal{L}(H)/\mathcal{LC}(H)$を$\mathcal{A}(H)$とかくことにする。$C^*$-環A(以下可分な場合のみとり扱うのでそのことを特にことわらないことにする)は単位元をもつ場合—ユニタルなC^*環—のみを扱うことにする. Aから$\mathcal{A}(H)$へのユニタルな(1を1に写す)な*-isomorphism τをAの拡大という。二つの拡大

$$\tau_1 : A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1), \qquad \tau_2 : A \longrightarrow \mathcal{A}(H_2)$$

が同値であることを、H_1からH_2へのユニタリ作用素が存在して

それによってひき起された $\mathcal{A}(H_1)$, $\mathcal{A}(H_2)$ 間の $*$−同型を θ とするとき、$\tau_2 = \theta \circ \tau_1$ となることと定義する. $[\tau_1]$, $[\tau_2]$ を $\mathrm{Ext}(A)$ の元とする.

$$\tau_1 ; A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1) \qquad \tau_2 ; A \longrightarrow \mathcal{A}(H_2)$$

このとき $\tau_1 + \tau_2 ; A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1 \oplus H_2)$ を

$$(\tau_1+\tau_2)(x) = \tau_1(x) \oplus \tau_2(x) \in \mathcal{A}(H_1) \oplus \mathcal{A}(H_2) \subset \mathcal{A}(H_1 \oplus H_2)$$

とし、$[\tau_1]+[\tau_2] = [\tau_1+\tau_2]$ と定義すると、これは代表元 τ_1, τ_2 のとり方によらず well-defined なのでこれを $\mathrm{Ext}(A)$ での和と呼ぶ. そこで当然この演算において 0 元の役割を果す拡大は何かということになるがその候補としては次の trivial extension が考えられる。即ち拡大 $\tau ; A \longrightarrow \mathcal{A}(H)$ が trivial であるとは

$$\exists \sigma ; A \longrightarrow \mathcal{L}(H) \quad \text{ユニタルな} *\text{−準同型} ;$$
$$\tau = \dot{\sigma}$$

ここで $\tau = \dot{\sigma}$ は $\tau(x) = \dot{\sigma}(x)$ の意味で右辺は $\sigma(x)$ の $\mathcal{A}(H)$ での像をあらわす. 写像についてのこの記号は本稿を通して使うことにする.

さて上の $\mathrm{Ext}(A)$ の演算の導入によりまず起る基本的な問題は次のことである.

1° Trivial extension が皆同値になるか？

2°. 1° が成立する時上の同値類が実際に 0 元の役割を果す

か？

3° Ext(A) は上の演算で群になるか？

Ext(A) については群構造から更に進んでそれが具体的な形で実現出来れば一番興味のある形になり，事実複素平面上の領域から起る可換な C^* 環の場合はそれが可能であるということが BDF－理論の重要な帰結の一つであったのであるが本稿ではそこまでは立入らない。

上の基本問題については 1°, 2° は Voiculescu[8] によって常に成立することが証明されたので Ext(A) は常に単位元をもつ可換な準群になっているわけである．3° については Arveson [2] によって，$[\tau] \in \mathrm{Ext}(A)$ が逆元をもつ場合が明らかにされ，それによって BDF の上記の場合 Ext(A) が群になることが非常に簡潔に証明出来ることが判明していたが最近 Anderson [1] はその形で群にならない例を示している．尚 trivial extension の存在自体は，A の任意の non-degenerate な表現 σ を multiplicity を高めて $\sigma(A)$ が non-zero なコンパクト作用素を含まないようにとっておけば $\dot{\sigma}$ は trivial extension になっている．3° についての状況は次の定理に示される

定理 1.1　拡大 $\tau : A \longrightarrow \mathcal{A}(H)$ について $[\tau]$ が Ext(A) で逆元をもつための必要十分条件は，τ が $\mathcal{L}(H)$ へのユニタルな completely positive lifting をもつことである．

i.e. $\exists \sigma : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ ユニタル completely positive map,

$$\dot{\sigma} = \tau$$

証明.（1°, 2° が示されたとしてのべる）

$\exists \sigma : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$, $\dot{\sigma} = \tau$ とする. Stinespring の結果から

$\exists \pi$; A の K 上への表現, $H \subset K$,

$P ; K \longrightarrow H$ への projection ; $\sigma(a) = P\pi(a)|H$

$K = H \oplus H^{\perp}$ として $\pi(a)$ の行列を

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & k_a \\ l_a & \sigma'(a) \end{pmatrix}$$ とすると

$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ から

$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) + k_a l_b$ ∴ $k_a l_b$ はコンパクト

一方 $k_{a^*} = l_a^*$ から, k_a, l_b は K 上のコンパクト作用素になるので

$\dot{\sigma}' ; A \longrightarrow \mathcal{A}(H^{\perp})$ は $*$-準同型.

そしてつくり方から $\tau \oplus \dot{\sigma}' = \dot{\pi}$.

よって trivial 拡大 τ_0 をとり $\tau_1 = \dot{\sigma}' \oplus \tau_0$, とおくと τ_1 は A の拡大で 2° により $\tau + \tau_1 \cong \dot{\pi}$, i.e. $[\tau]$ は逆元をもつ。

次に $[\tau]$ が逆元をもつとすると, 拡大 $\tau_1 : A \to \mathcal{A}(H_1)$ と A の $H \oplus H_1$ 上への表現 σ があって, $\tau + \tau_1 = \dot{\sigma}$

そこで

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(a) & \sigma_{12}(a) \\ \sigma_{21}(a) & \sigma_{22}(a) \end{pmatrix}$$

とおけば

$\dot{\sigma}_{11} = \tau$ となって σ_{11} は τ のユニタルな completely positive lifting である。

§2. Ext(A) の準群構造。ヒルベルト空間上の作用素の分類という立場からの1°の主張の意味は normal な作用素の compact perturbation を含むユニタリー同値類はその essential spectrum できまるという Weyl–von Neumann–Berg の定理そのものであった。そして2°の主張も可換な C^*環の段階では古典的な作用素の(compact) perturbation の結果を土台にしている。これを非可換の C^*環に拡張するために以下の概念を導入する。A の表現 π, σ について π と σ が近似的同値 $\pi \underset{a}{\sim} \sigma$ ということを次のように定義する

$\exists u_n : H_\pi \longrightarrow H_\sigma$ ユニタリ作用素

(i) $u_n \pi(a) u_n^* - \sigma(a)$ はコンパクト作用素

(ii) $\lim_{n\to\infty} \| u_n \pi(a) u_n^* - \sigma(a) \| = 0 \quad \forall a \in A$.

本節の議論の出発点となるのは次の Arveson–Voiculescu の結果であるが、この完全な証明は本稿の枠を超えるので[3]にゆずることにする。

定理2.1　$\mathfrak{A}$をH上のユニタルな可分C^*-環とする。φを$\mathfrak{A}$から$\mathcal{L}(K)$へのユニタルなcompletely positive mapでかつ$\mathfrak{A}\cap\mathcal{LC}(H)$上で0になるものとするとKからHへのisometryの列$\{v_n\}$が次のように存在する。

(i) $\varphi(a) - v_n^* a v_n$ はコンパクト　(ii) $\lim_{n\to\infty}\|\varphi(a) - v_n^* a v_n\| = 0$.

これをもとにするとφが更にAの表現になっているときには(πとかく)上の$\{v_n\}$は $v_n\pi(a) - a v_n$ がコンパクト作用素になるという性質をもっていることがわかる。$p_n = v_n v_n^*$とし、$\varphi_n(a) = (1-p_n)a|(1-p_n)H$ とおく。つくり方から$\{\varphi_n\}$はユニタルなcompletely positive mapで更に

$$\varphi_n(ab) - \varphi_n(a)\varphi_n(b) \in \mathcal{LC}(H)$$

である。$u_n : p_n^\perp H \oplus K \longrightarrow H$ を $p_n^\perp H$ 上で1, K上でv_nとおいたユニタリー作用素とし、$p_n^\perp H \oplus K \longrightarrow K$ というprojectionを q_K^n とすると

$$a u_n = a p_n^\perp + a v_n q_K^n$$

$$u_n(\varphi_n(a) \oplus \pi(a)) = \varphi_n(a) p_n^\perp + v_n \pi(a) q_K^n \quad \text{から}$$

$$a u_n - u_n(\varphi_n(a) \oplus \pi(a)) = p_n a p_n^\perp + (a v_n - v_n \pi(a)) q_K^n$$

ここでp_nは表現πのときは$\mathfrak{A}$の元をessentialにreduceするから上の右辺はコンパクト作用素になり、又右辺の評価式より、$\mathfrak{A}$の任意の有限ケの元の集合Fと、$\varepsilon > 0$についてnを十分

大きくとれば

$$\max_{a \in \mathfrak{F}} \| a u_n - u_n(\varphi_n(a) \oplus \pi(a)) \| \leq \varepsilon$$ が言える。

以上をもとに2°に対する解答として

定理2.2. σ を A の任意の拡大，$\tau = \dot{\rho}$ を trivial な拡大とすると、$\sigma + \tau$ と σ は同値である。

証明. $\mathfrak{a} = \{ x \in \mathcal{L}(H) \mid \dot{x} \in \sigma(A) \}$ とし、$\mathfrak{a}$ の表現 π を $\pi(x) = \rho \circ \sigma^{-1}(\dot{x})$ とおくと π は定理2.1の条件をみたす。そこで π' を π の infinite copy とすると前定理から、$\mathfrak{a}$ の元の有限ケの集合 $\mathfrak{F}$ と $\varepsilon > 0$ について

$\exists \varphi$; essentially reducing な部分空間 H_φ による $\mathfrak{a}$ の compressing map, $u : H_\varphi \oplus H_\pi \longrightarrow H$ ユニタリー作用素

(i) $u(\varphi(a) \oplus \pi(a)) - a u$ はコンパクト

(ii) $\| u(\varphi(a) \oplus \pi(a)) - a u \| < \varepsilon/2 \quad \forall a \in \mathfrak{F}$

となる。これを $id \underset{\varepsilon/2}{\sim} \varphi \oplus \pi'$ とかくことにすると、この意味で $(\varphi \oplus \pi') \oplus \pi \underset{\varepsilon/2}{\sim} id \oplus \pi$

一方 $\varphi \oplus \pi'$ と $(\varphi \oplus \pi') \oplus \pi$ はユニタリー同値であるから $\varphi \oplus \pi' \underset{\varepsilon/2}{\sim} id \oplus \pi$。よって $id \oplus \pi \underset{\varepsilon}{\sim} id$ となりこれはこの節のはじめの近似同値の記号では $id \oplus \pi \underset{a}{\sim} id$ を意味する。従って $\sigma \oplus \tau \sim \sigma$ である。

上の証明からわかるように得られている結果は compact

perturbationの評価を含んだものでその点では結果は2°の主張そのものの定理より、もっと詳しくなっているわけである。この点は次の1°の主張についての議論でも同じことが言える。

H上のユニタルなC^*-環$\mathfrak{A}$の表現πについて(表現空間K)

$K_e = [(\pi(\mathfrak{A})\cap \mathcal{LC}(K))K]$ を $\pi(\mathfrak{A})$ の essential subspace,

又 $K = K_e \oplus K_e^{\perp}$ によるπの分解 $\pi = \pi_e \oplus \pi'$ においてπ_eをπのessential partと呼ぶ。次のことが基本的である。

定理2.3 π, σ を $\mathfrak{A}$ の non-degenerate な表現とすると

$$\pi \underset{a}{\sim} \sigma \rightleftarrows \ker\pi = \ker\sigma,\quad \ker\dot{\pi} = \ker\dot{\sigma},$$
$$\pi_e \cong \sigma_e$$

証明の概略 $\pi \underset{a}{\sim} \sigma$ をみとるH_πよりH_σへのユニタリー作用素の列を$\{u_n\}$とし、$\{u_n\}$の弱位相での極限点の一つをu_∞とする。$\{u_n\}$の部分列を考えて$\{u_n\}$自体をu_∞に収束するとしても差支えない。

$\forall a \in \ker\dot{\pi} \Rightarrow \pi(a)$はコンパクト よって $u_n\pi(a)u_n^*$ の極限の $u_\infty\pi(a)u_\infty^* = \sigma(a)$ も又コンパクト i.e. $\dot{\sigma}(a) = 0$. よって $\ker\dot{\pi} \subset \ker\dot{\sigma}$ となり対称性から $\ker\dot{\pi} = \ker\dot{\sigma}$

次にp_π, p_σをそれぞれのessential subspaceへのprojectionとすると、$u_\infty p_\pi u_\infty^* = p_\sigma$. そこで $w = p_\pi u_\infty^* | (H_\sigma)_e$ とおくと wは$(H_\sigma)_e$から$(H_\pi)_e$の中へのisometryでかつ$\sigma_e(\ker\dot{\sigma})$

と $\pi_e(\ker\dot{\pi})$ の subrepresentation と間の同値関係を与える。これから $\sigma_e \prec \pi_e$ となり逆も出るから $\sigma_e \cong \pi_e$ となる。

逆は ρ ; $\pi(a) \longrightarrow \sigma'(a)$ とするとこれは仮定より well defined で、$\pi(a)$ をコンパクトとすると $a \in \ker\dot{\pi} = \ker\dot{\sigma}$ から $\sigma'(a) = 0$ となるから、$\sigma(\pi(a) \cap \mathcal{LC}(H_\pi)) = 0$ となる。従って定理2.2 の証明と同様にして $id \oplus \rho \underset{a}{\sim} id$. 即ち $\pi \oplus \sigma' \underset{a}{\sim} \pi$。同様に $\sigma \oplus \pi' \underset{a}{\sim} \sigma$

従って $\pi_e \cong \sigma_e$ から

$$\pi \underset{a}{\sim} \pi \oplus \sigma' = (\pi_e \oplus \pi') \oplus \sigma' \cong (\sigma_e \oplus \sigma') \oplus \pi'$$
$$\underset{a}{\sim} \sigma \oplus \pi' \underset{a}{\sim} \sigma$$

証明）.

系. Trivial extension は皆同値である.

実際このときは、$\tau_1 = \dot{\rho}_1 \quad \tau_2 = \dot{\rho}_2$ とすると

$$\ker\rho_1 = \ker\dot{\rho}_1 = \ker\rho_2 = \ker\dot{\rho}_2 = \{0\}$$

$(\rho_1)_e = (\rho_2)_e = 0$ の状況であるから明らかに

$\rho_1 \underset{a}{\sim} \rho_2$ よって $\tau_1 \sim \tau_2$.

§3. Ext(A) についての J. Andersen の反例

Ext(A) が群になるとは限らないという Andersen の反例は §1 でのべたことを考えると、completely positive map の lifting についての反例も与えていることになる。彼の議論の基になっ

ているのは次の事実である.

F_2 を2つの生成元 s_1, s_2 をもつ自由群としその中で

$$S = \{ s_1^k t \mid k \neq 0 \} \qquad \text{とおくと}$$

$F_2 = S \cup s_1 S$, でかつ S, $s_2 S$, $s_2^2 S$ は互に素な集合である. e を $\ell^2(F_2)$ において S で生成された部分空間 $[S]$ への projection とする. u_1, u_2 を s_1, s_2 の正則表現とすると、一般に $u_t e u_t^* = \mathrm{proj}[tS]$ となることから

$$e + u_1 e u_1^* \geq 1, \qquad e + u_2 e u_2^* + u_2^2 e (u_2^2)^* \leq 1$$

N を injective な finite von Neumann 環とし, φ を群環 $C_r^*(F_2)$ から N の中への(ユニタルな)$*$-準同型とする. 今 $\hat{\varphi}$ を φ の $C^*(C_r^*(F_2), e)$ への completely positive な拡大とすると, u_i は $\hat{\varphi}$ の multiplicative domain に入っているから (Choi [4])

$$\hat{\varphi}(e) + \varphi(u_1)\hat{\varphi}(e)\varphi(u_1)^* \geq 1,$$

$$\hat{\varphi}(e) + \varphi(u_2)\hat{\varphi}(e)\varphi(u_2)^* + \varphi(u_2^2)\hat{\varphi}(e)\varphi(u_2^2)^* \leq 1$$

よって τ を N の trace とすると

$$2\tau(\hat{\varphi}(e)) \geq 1 \geq 3\tau(\hat{\varphi}(e))$$

となって矛盾が出るので上の様な状況での写像 φ は存在しない。これは N が injective でなく, ある injective な von Neumann 環の商環になっている時は上の様な φ の lifting は不可能であることを示している.

Hを可分なヒルベルト空間とし$\{P_n\}$を直交するn次元部分空間へのprojectionとする。$\sum_n P_n = 1$とする。Mを$P_n \mathcal{L}(H) P_n$の直和とし、τ_nを$P_n \mathcal{L}(H) P_n$上のtraceとして自然数上の自由なultrafilter ωをとると、$\mathcal{L}(H)$上のstate

$$f(a) = \lim_{\omega} \tau_n(p_n a p_n)$$

が定義出来る。fはM-centralなstateである。

$$J_\omega = \{ a \in M \mid f(a^* a) = 0 \} \quad \text{とおく。}$$

$N = M/J_\omega$がII_1型のfactorに表現出来ることはよく知られているが更に[10]により$C^*_r(F_2)$はNの中に埋めこむことが出来る。そしてそのMでの逆像は生成元をu, vとするとF_2の各語$w(u,v) = (w(u_n, v_n))$について$\{\tau_n(w(u_n, v_n))\}$が有限ケを除いて0になるようにとることが出来る。従って$C^*(u,v)$の任意の元$a = (a_n)$について$\{\tau_n(a_n)\}$は収束する。$J = C^*(u,v) \cap J_\omega$とおくと次のことが成り立つ

補題3.1 Mのprojection pで$f(p) \geq \frac{1}{2}$, $pJ \subset \mathcal{LC}(H)$となるものが存在する。

証明のideaはJの中のstrictly positiveな元$a = (a_n)$をとりa_nのspectrumをしらべて

$$f(p) \geq \frac{1}{2}, \qquad pa \in \mathcal{LC}(H)$$

となるようなprojectionを求めるわけである。

f による $\mathcal{L}(H)$ の GNS-表現を π_f とすると、π_f の kernel は $\mathcal{LC}(H)$ であるから、$\pi_f(\mathcal{L}(H))$ と $\mathcal{A}(H)$ を同一視して $\mathcal{A}(H) \subset \mathcal{L}(H_f)$ と考えておく。$\dot{f} = f \circ \pi_f^{-1}$ とおくと $\dot{f}$ は $\mathcal{A}(H)$ 上の $\dot{M}$-central state である。そこで補題の p をとり $\mathcal{A}(H)$ の部分環 $C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p})$ を考える。Andersen が示したのは次のことである。

"$C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p})$ の $\mathcal{A}(H)$ への inclusion map は $\mathcal{L}(H)$ に completely positive map として持ち上げることは出来ない"。

証明。$g^{\perp} = \mathrm{proj}[\dot{J}H_f]$ とおくと、g は $C^*(\dot{u}, \dot{v})$ を reduce するので、$a \in C^*(u,v) \longrightarrow \dot{a}g \in \mathcal{L}(H_f)$ は $*$-準同型でその kernel の中に J を含む。$C_r^*(F_2) \cong C^*(u,v)/J$ は単純であるから、上の対応は $C_r^*(F_2)$ から $gC^*(\dot{u}, \dot{v})|gH_f$ 間の $*$-同型 φ をひきおこす。$\mathcal{L}(H_f)$ の injectivity から φ の $C^*(C_r^*(F_2), e)$ への completely positive な拡大を ψ とし、$d = \psi(e)$, $v_i = \psi(u_i) = \varphi(u_i)$ とおくと、この節のはじめにのべたことから $\mathcal{L}(H_f)$ で

$$d + v_1 d v_1^* \geq g, \quad d + v_2 d v_2^* + v_2^2 d v_2^{2*} \leq g$$

$C^*(\dot{u}, \dot{v})$ の元 w_i を $w_i g = v_i$ ととる。w_i は g と可換で又 $d \leq g$ であるから上式は

$$d + w_1 d w_1^* \geq g, \quad d + w_2 d w_2^* + w_2^2 d w_2^{2*} \leq g.$$

今 inclusion map ι が $\mathcal{L}(H)$ に持ち上げられたとしそれを ρ とおくと、ρ は $C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p}, g, d)$ から $\mathcal{L}(H)$ への completely positive map ϕ に拡大出来る. つくり方から

$$\dot\phi \,;\, C^*(\dot u, \dot v, \dot p, \dot q, \dot d) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{A}(H)$$

は $\dot p = \iota$ の拡大である. そして w_i は $\dot\phi$ の multiplicative domain に入っているから([ ]参照)

$$\dot\phi(d) + w_1\dot\phi(d)w_1^* \geq \dot\phi(q)$$

$$\dot\phi(d) + w_2\dot\phi(d)w_2^* + w_2^2\dot\phi(d)w_2^{2*} \leq \dot\phi(q)$$

よって f の性質から

$$2\dot f(\dot\phi(d)) \geq \dot f(\dot\phi(q)) \geq 3\dot f(\dot\phi(d)) \qquad \text{となり}$$

$\dot f(\dot\phi(d)) = 0$. しかし補題から $\dot p \leq q$ であるから $\dot p \leq \dot\phi(q)$ で

$$\dot f(\dot\phi(q)) \geq \dot f(\dot p) = f(p) \geq \frac{1}{2}$$

となり $f(\dot\phi(q)) = 0$ と矛盾する. 証明了.

§4. その他. Voiculescu [8] は §2 の議論と関連して Weyl-von Neumann-Berg の定理の直接の C^*環への拡張を定式化し証明している。§3 の結果は可分な C^*環より $\mathcal{A}(H) = \mathcal{L}(H)/\mathcal{LC}(H)$ への completely positive map で $\mathcal{L}(H)$ への completely positive map への持ち上げが不可能な例であったが肯定的な場合としては、C^*環が nuclear な時には (domain でも image でも) 持ちあげが可能であるという Choi-Effros の結果[6]がある。これも Arveson [3] においては写像間の距離を導入することにより、非常に見通しのよい明快な証明が与えられている。

文献

1. J. Andersen, A C^*-algebra A for which Ext(A) is not a group, preprint.
2. W. Arveson, A note on essentially normal operators, Proc. Royal Irish Acad., Sect. A 74 (1974), 143–146
3. ———, Notes on extensions of C^*-algebras, Duke Math. J. 44 (1977), 329–356
4. L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras, Springer Lecture Notes 345 (1973), 58–128
5. ———, Extensions of C^*-algebras and K-homology, Ann. Math. 105 (1977), 265–324
6. M. D. Choi and E. G. Effros, The completely positive lifting problem, Ann. of Math. 104 (1976), 585–609
7. ———, Lifting problems and the cohomology of C^*-algebras, preprint.
8. D. Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev. Roumania, pures et appl., 21 (1976), 97–113.
9. M-D. Choi, A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras, Illinois J. Math., 18 (1974), 565–574

10. S. Wassermann, On tensor products of certain group C^*-algebras, J. Funct. Anal., 23 (1976), 239-254